MOTO INTERNO ED ESTERNO

INTRODUZIONE - DEFINIZIONI

Moto esterno: Il flusso ad una certa distanza non è influenzato dalla presenza della parete.

Moto interno: l'intera corrente fluida risente (si modifica) per effetto della parete.

Zona di imbocco o di sviluppo: zona all'ingresso di un condotto (moto interno) in cui gli effetti della presenza della parete si propagano solo ad una parte del fluido. Al termine di questa zona, di dice che il moto è pienamente sviluppato.

Scambio termico per convezione: asportazione o cessione di calore da parte di un fluido in moto che lambisce una parete verso/da la parete stessa.

Convezione forzata: scambio termico convettivo in cui il moto del fluido è indotto da agenti esterni al sistema (pompe, ventilatori etc.).

Convezione naturale: scambio termico convettivo in cui il moto è indotto dall'azione del campo gravitazionale sulle differenze di densità dovute ai gradienti di temperatura. Oppure dall'azione di un campo di forze sulle variazioni indotte dai gradienti di temperatura su una proprietà ad esso collegata (es. campo elettrico – permittività elettrica).

IL COEFFICIENTE DI CONVEZIONE

Legge della convezione o di Newton: si chiama cosi (anche se Newton non la ha mai scritta) in omaggio al fatto che N. fu il primo ad osservare che la velocità di raffreddamento di un corpo immerso in un fluido è proporzionale alla differenza di temperatura tra il fluido ed il corpo stesso.

$$q'' = h_c\left(T_w - T_{ref}\right) \quad \rightarrow \quad h_c\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K}}\right]$$

Moto esterno: $T_{ref} = T_\infty$

Moto interno: $T_{ref} = T_m$

A immediato contatto della parete il fluido è fermo, quindi lo scambio termico avviene per *conduzione*

$$q'' = h_c\left(T_w - T_{ref}\right) = -\lambda_f \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} \quad \rightarrow \quad h_c = -\frac{\lambda_f}{\left(T_w - T_{ref}\right)}\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}$$

quindi se si riuscisse a determinare il gradiente termico alla parete non ci sarebbe nessun bisogno del coefficiente di convezione. Questo a livello teorico è possibile risolvendo il sistema accoppiato N-S + bilancio energia.

IL COEFFICIENTE DI CONVEZIONE

Nella pratica: il gradiente termico alla parete non si può determinare che in pochi casi semplici. In particolare, la presenza di turbolenza complica il problema.

Sfruttando l'analisi dimensionale, si ricorre pertanto a *correlazioni di scambio termico*, nella forma

$$Nu = f\left(Re\ ,Pr\right) \quad \text{(convezione forzata)}$$

$$Nu = f\left(Gr\ ,Pr\right) \quad \text{(convezione naturale)}$$

$$Nu = \frac{h_c\, L}{\lambda_f} = -\frac{L}{\left(T_w - T_{ref}\right)} \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=0} \qquad \frac{\text{gradiente termico alla parete}}{\text{gradiente termico medio}}$$

Dove *L* è un'opportuna *lunghezza di riferimento* (diametro del condotto – dimensione della superficie di scambio, etc.).

Per capire meglio la convezione, dobbiamo adesso approfondire lo studio del campo termico e di moto in prossimità di una parete solida.

LO STRATO LIMITE LAMINARE

STRATO LIMITE – INTRODUZIONE

Fluido in moto uniforme che incontra una parete parallela a *U* :
gli effetti viscosi sono confinati in un sottile strato aderente alla parete detto da Prandtl STRATO LIMITE (ingl. BOUNDARY LAYER)

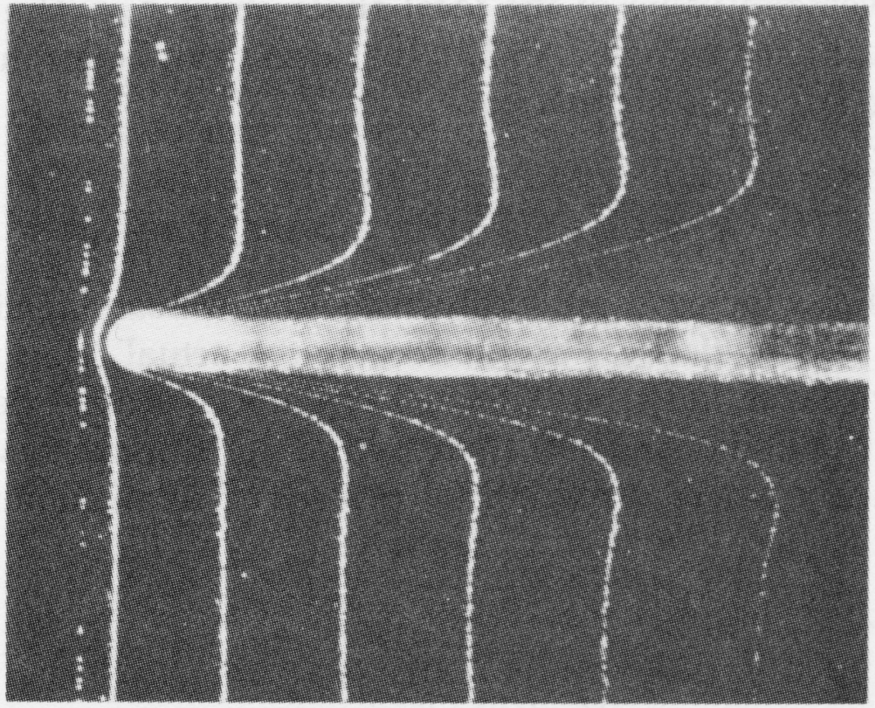


Figure 5.7 Visualization of the laminar boundary layers on the two sides of a flat plate by using the hydrogen bubble method: 0.01% salt water, $U_\infty = 0.6$ cm/s, plate thickness = 0.5 mm. (Nakayama et al. [12], with permission from Pergamon Press.)

STRATO LIMITE – INTRODUZIONE

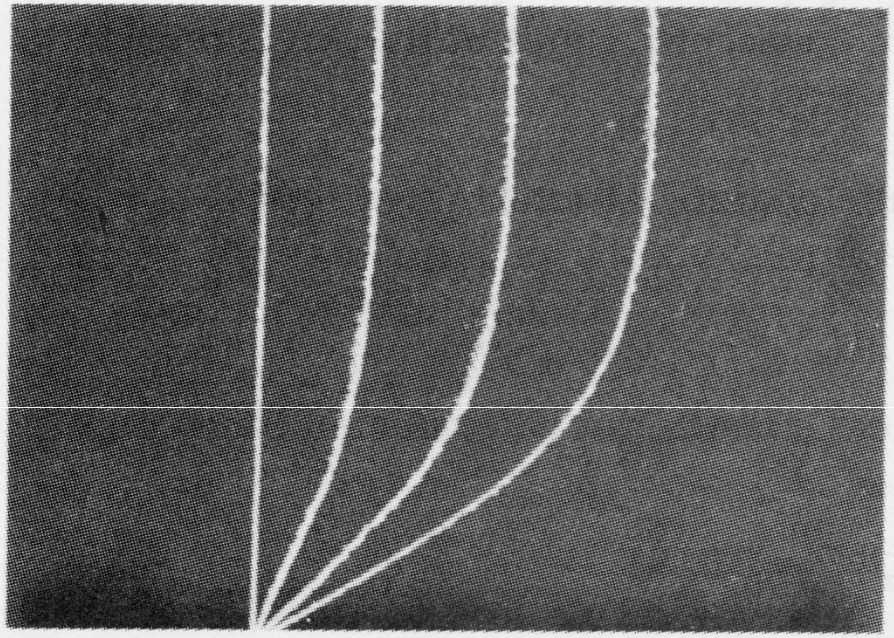


Figure 5.8 Visualization of the longitudinal velocity profile in the laminar boundary layer over a flat plate: 0.01% salt water, $U_\infty = 0.6$ cm/s, distance from the leading edge $x = 20$ cm. (Nakayama et al. [12], with permission from Pergamon Press.)

STRATO LIMITE – INTRODUZIONE

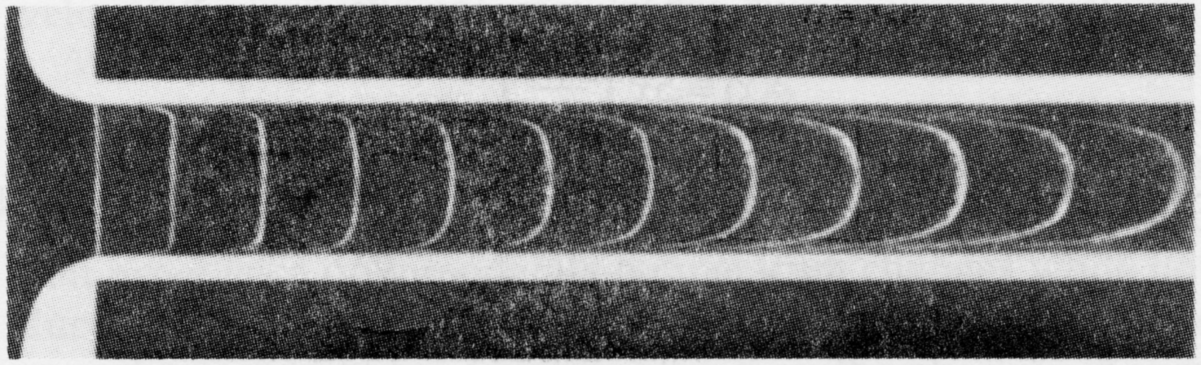


Figure 6.2 Laminar flow in the entrance region of a tube with circular cross section: water, $U = 6$ cm/s, $D = 2.7$ cm. (Nakayama et al. [1], with permission from Pergamon Press.)

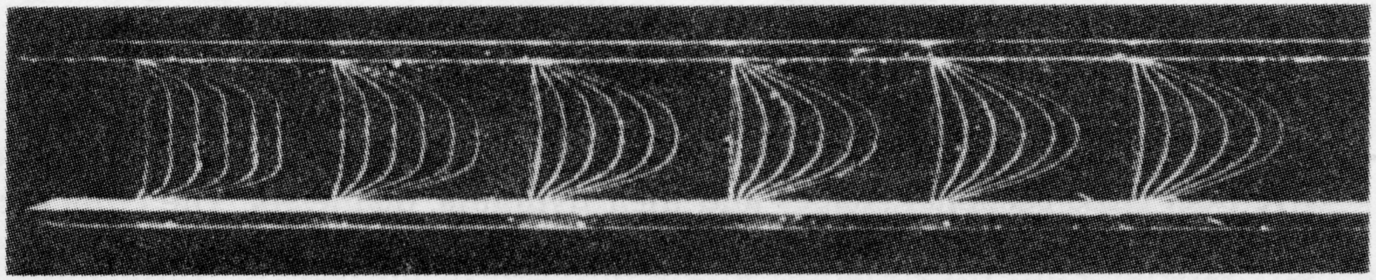
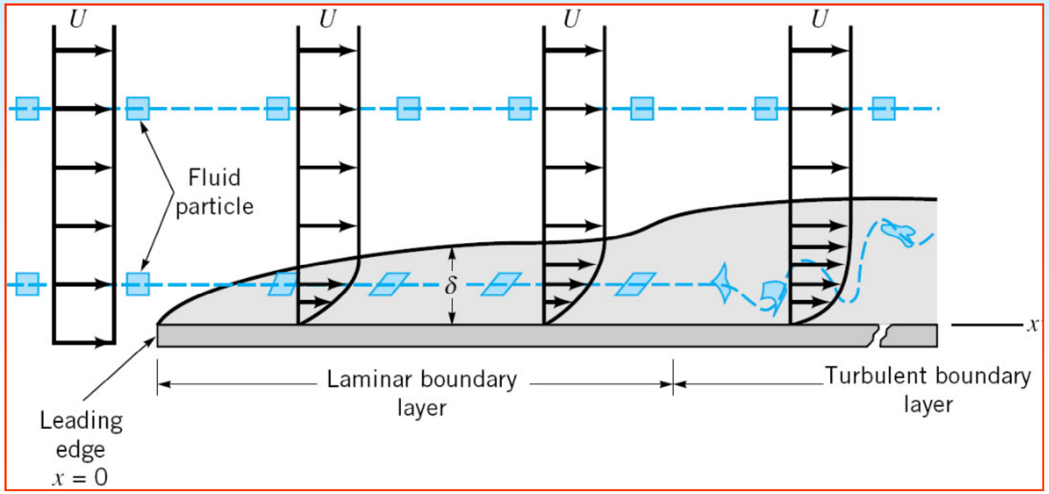


Figure 6.4 Laminar flow in the entrance region of a parallel-plate channel: water, $U = 3.2$ cm/s, $D = 2$ cm. (Nakayama et al. [1], with permission from Pergamon Press.)

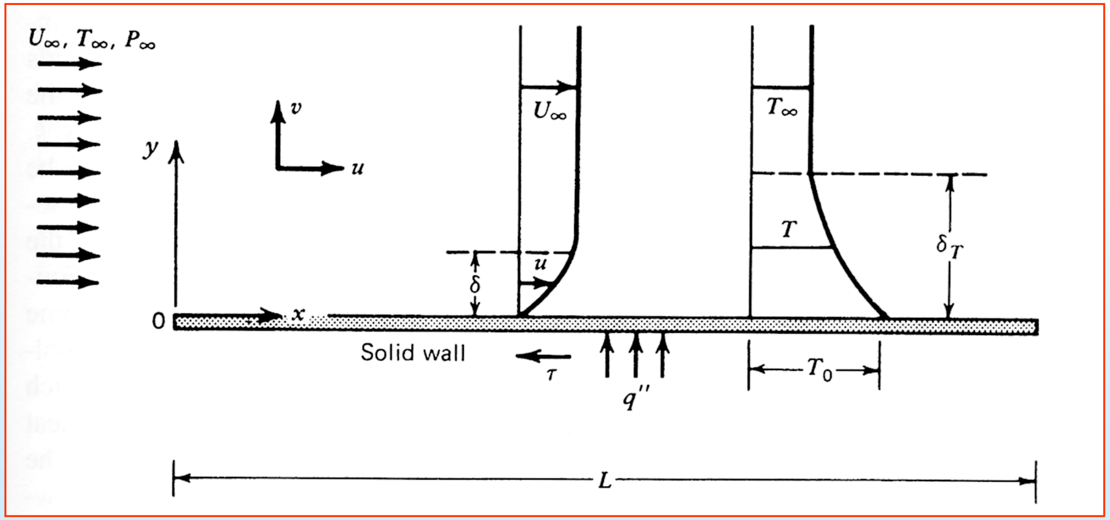
STRATO LIMITE – INTRODUZIONE



La piastra agisce da "momentum sink": drena quantità di moto dal fluido

Spessore dello strato limite, δ, corrisponde convenzionalmente a $v_x = 0.99\ U$

Un concetto analogo si può introdurre, oltre che per la diffusione della quantità di moto, per la diffusione di calore: STRATO LIMITE TERMICO



Spessore dello strato limite termico, δ_T, corrisponde convenzionalmente a un ΔT pari all' 1% del massimo

$$\delta_T \;\Big|\; \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = 0.01$$

STRATO LIMITE – E' davvero sottile?

Rayleigh's argument: la quantità di moto diffonde con una velocità che è dipende dalla viscosità cinematica, per cui si ipotizza

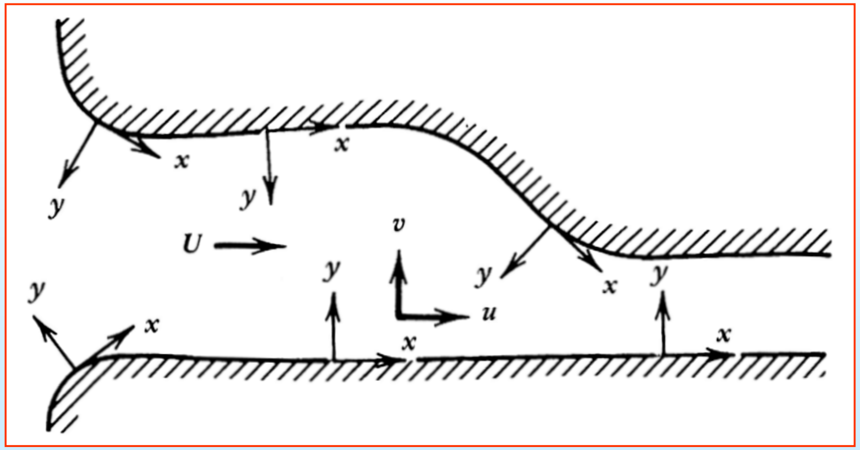
$$\delta \sim \sqrt{\upsilon t} \qquad t(x) = \frac{x}{U}$$

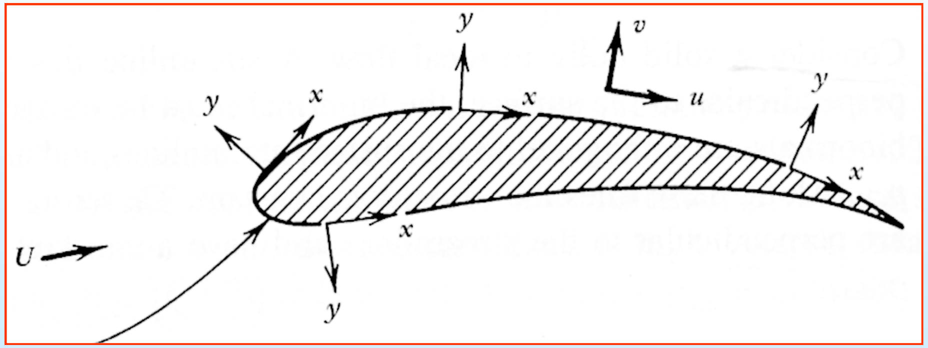
dove t è il tempo trascorso da quando il fluido ha incontrato il bordo di attacco della piastra, per cui

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\upsilon x}{U}} \quad \rightarrow \quad \frac{\delta}{x} \sim \sqrt{\frac{\upsilon}{Ux}} = \frac{1}{\sqrt{Re_x}}$$

- lo strato limite è tanto più sottile quanto maggiore è *Re*
- il suo spessore cresce con $x^{0.5}$

Se lo strato limite è sottile, si avvolge sugli oggetti come un "tappeto" e si può definire un sistema di coordinate curvilinee locali per descriverlo





STRATO LIMITE – Grandezze Caratteristiche

Spessore di spostamento δ* (displacement thickness)

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) \mathrm{d}y$$

Spessore di q.moto θ (momentum thickness)

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{v_x}{U}\left(1 - \frac{v_x}{U}\right) \mathrm{d}y$$

Il significato fisico di δ* e θ verrà chiarito in seguito (slide 21)

Fattore di Fanning $c_f = \dfrac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}$ τ_w tensione di taglio alla parete

Coefficiente medio di attrito $C_{D,f} = \dfrac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = \dfrac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 bL} = \dfrac{\int_A \tau_w \, \mathrm{d}A}{\frac{1}{2}\rho U^2 bL}$

STRATO LIMITE – Derivazione delle equazioni - 1

Metodo degli ordini di grandezza: ipotizzo gli ordini di grandezza delle variabili che compaiono nelle equazioni e semplifico i termini di ordine superiore.
Le arbitrarietà introdotte trovano giustificazione nell'esperienza.

Ipotesi iniziali sugli ordini di grandezza (ricordare che $\delta << L$, *Re* >>1)

$$v_x \sim U \;\; ; \;\; x \sim L \;\; ; \;\; \partial v_x \sim U - 0 = U \;\; ; \;\; \partial x \sim L - 0 = L$$

$$y \sim \delta \;\; ; \; \partial y \sim \delta \; ; \qquad \partial v_y \sim \alpha, \; \text{incognito}$$

Dall'equazione di continuità possiamo determinare l'ordine di grandezza di α

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$\left[\frac{U}{L}\right] + \left[\frac{\alpha}{\delta}\right] = 0$$

ne segue che, volendo conservare entrambi i termini

$$\boxed{\alpha \sim \frac{\delta U}{L}}$$

STRATO LIMITE – Derivazione delle equazioni - 2

Considero ora
N-S su y
(moto stazionario)

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \upsilon \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \upsilon \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$$

$$\left[U \frac{1}{L}\frac{\delta U}{L}\right] + \left[\frac{\delta U}{L}\frac{1}{\delta}\frac{\delta U}{L}\right] = \left[\frac{P}{\rho\delta}\right] + \left[\frac{\upsilon}{L^2}\frac{\delta U}{L}\right] + \left[\frac{\upsilon}{\delta^2}\frac{\delta U}{L}\right]$$

e dividendo per U²/δ

$$\left[\frac{\delta^2}{L^2}\right] + \left[\frac{\delta^2}{L^2}\right] = \left[\frac{P}{\rho U^2}\right] + \left[\frac{1}{Re}\frac{\delta^2}{L^2}\right] + \left[\frac{1}{Re}\right]$$

se ipotizzo p~ρU²
sopravvive solo il
termine in rosso
per cui ottengo

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \rightarrow p = f(x)}$$

la pressione nello strato limite non varia con *y*: è imposta dall'esterno

Dato che fuori dallo strato limite il moto è potenziale, **posso calcolare la pressione nello S.L. con Bernoulli**

STRATO LIMITE – Derivazione delle equazioni - 3

Considero ora N-S su x
(moto stazionario)

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \upsilon \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \upsilon \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$\left[\frac{U^2}{L}\right] + \left[\frac{U^2}{L}\right] = \left[\frac{U^2}{L}\right] + \left[\frac{\upsilon U}{L^2}\right] + \left[\frac{\upsilon U}{\delta^2}\right]$$

e dividendo per U^2/L
(ordine più alto)

$$[1]+[1] = [1]+\left[\frac{1}{Re}\right]+\left[\frac{L^2}{\delta^2}\frac{1}{Re}\right]$$

Il termine in $1/Re$ scompare perchè $Re >> 1$
il termine in rosso viene ritenuto perchè in accordo con Rayleigh $\delta/L \sim 1/Re^{0.5}$

per cui si ottiene

$$\boxed{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \upsilon \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$$

STRATO LIMITE – Riepilogo delle equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = 0 & \text{continuità} \\[2ex] v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \upsilon \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} & \text{N-S su } x \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 & \text{N-S su } y \end{cases}$$

Inoltre, da Bernoulli applicata ad una streamline fuori dallo strato limite

$$\frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{cost} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = U\frac{\partial U}{\partial x}$$

quindi N-S su x può scriversi anche come

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = U\frac{\partial U}{\partial x} + \upsilon \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

STRATO LIMITE TERMICO: equazione

Dall'equazione del trasporto della temperatura (entalpia), con q'''= φ = 0

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \lambda \nabla^2 T + \cancel{q}''' + \cancel{\varphi}$$

Con una procedura analoga, si ottiene

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Simile nella forma a N-S su *x* (senza il termine di pressione)

STRATO LIMITE TURBOLENTO - Equazioni

Sono presenti i termini di trasporto turbolenti (metodo RANS)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\upsilon \dfrac{\partial v_x}{\partial y} - v'_x v'_y \right) = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{mol} + \tau_{eddy} \right) \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ v_x \dfrac{\partial T}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(a \dfrac{\partial T}{\partial y} - v'_y T' \right) = \dfrac{1}{c_p \rho}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(q''_{mol} + q''_{eddy} \right) \end{cases}$$

E definendo le *viscosità e diffusività turbolente* da $\varepsilon_M \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = -\, v'_x v'_y \quad , \; \varepsilon_H \dfrac{\partial T}{\partial y} = -\, v'_y T'$

---

la 2ª e la 4ª equazione si scrivono come

$$\begin{cases} v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\left(\upsilon + \varepsilon_M \right) \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \right] = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\tau_{app}}{\rho} \right) \\ v_x \dfrac{\partial T}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\left(a + \varepsilon_H \right) \dfrac{\partial T}{\partial y} \right] = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{q''_{app}}{c_p \rho} \right) \end{cases}$$

CARATTERISTICHE DELLO STRATO LIMITE

1. Lo strato limite è sottile se *Re* è elevato.
2. Si “avvolge” sulle superfici.
3. Le equazioni dello strato limite sono *paraboliche*: quello che è a monte non risente di ciò che è a valle. La evoluzione per $x > X_0$ dipende solo dalle condizioni iniziali in assegnate $x = X_0$.
4. La pressione non varia lungo y: è *imposta dall’esterno*. Ne segue che si può calcolare la risultante delle azioni di pressione sulla superficie risolvendo il moto potenziale al di fuori dello strato limite, come se lo S.L. non esistesse.
5. Per il calcolo delle tensioni di taglio, bisogna invece trovare il profilo di velocità nello S.L. e calcolare

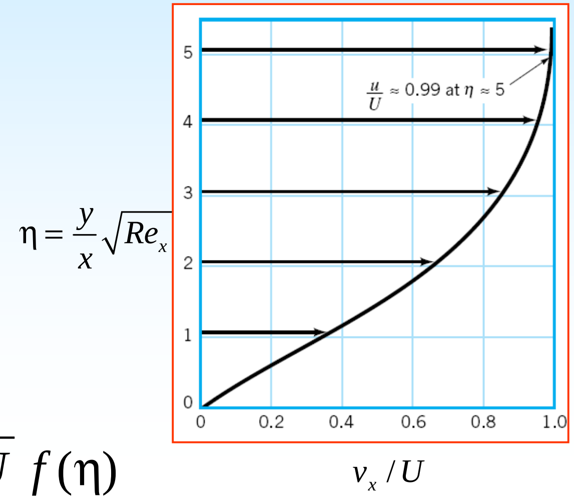
$$\tau_w = \left.\tau_{xy}\right|_{y=0} = \left.\mu \frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0}$$

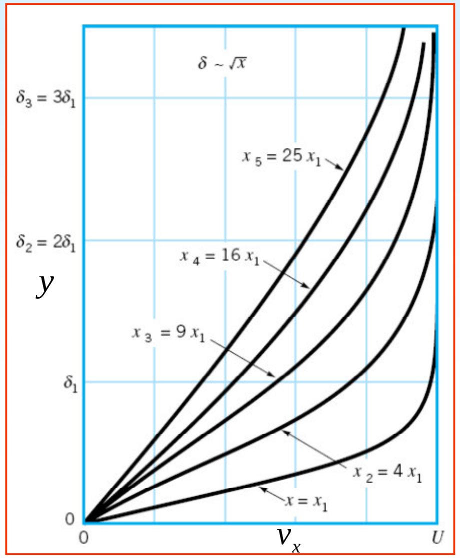
6. Nel caso di moto turbolento, compare una componente di trasporto turbolento sia nella equazione di N-S su x che in quella dell’energia; La soluzione richiede un modello di turbolenza.

STRATO LIMITE – SOLUZIONE DI BLASIUS (1)

Blasius risolse numericamente le equazioni dello S.L. nell'ipotesi di moto laminare e gradiente di pressione nullo (*U* uniforme) $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = \upsilon \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \end{cases}$$





Si definisce una variabile ausiliaria $\eta = \frac{y}{x}\sqrt{Re_x}$

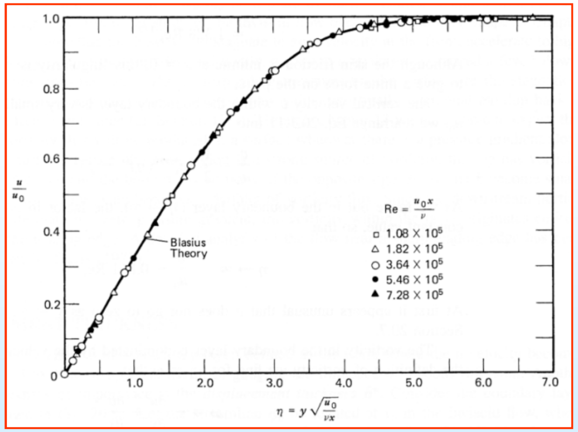
E la funzione di corrente $\psi = \sqrt{\upsilon x U}\; f(\eta)$

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U\; f'(\eta) \;\; , \;\; v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \sqrt{\frac{\upsilon U}{4x}}\left[\eta\, f'(\eta) - f(\eta)\right]$$

dove $f'(\eta) = \frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\eta}$

Sostituendo in N-S si ha $\boxed{2 f''' + f\; f'' = 0}$

Con condizioni al contorno $\begin{cases} f' = f = 0 \,,\; \eta = 0 \\ f' \to 1 \,,\; \eta \to \infty \end{cases}$



Integrando numericamente si ottiene $\boxed{\frac{\delta}{x} = \frac{4.91}{\sqrt{Re_x}}}$

Coerente con l'ipotesi di Rayleigh

STRATO LIMITE – SOLUZIONE DI BLASIUS (2)

Riepilogo dei risultati di Blasius

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.91}{\sqrt{Re_x}} = \frac{4.91}{\sqrt{\frac{U\,x}{\upsilon}}}$$ Spessore dello s.l

$$\frac{\delta *}{x} = \frac{1.721}{\sqrt{Re_x}}$$ Spessore di spostamento dello s.l

$$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$$ Spessore di momento dello s.l

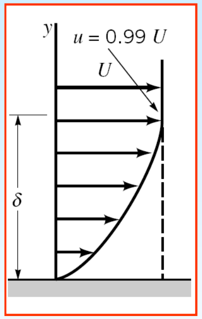
$$\tau_w = \frac{0.332\rho U^2}{\sqrt{Re_x}}$$ Tensione di taglio alla parete

$$c_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$$ Fattore di Fanning $c_f = \dfrac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}$

$$C_{Df} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}} = \frac{1.328}{\sqrt{\frac{U\,L}{\upsilon}}}$$ Coeff. medio di attrito $C_{D,f} = \dfrac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 bL} = \dfrac{\int_A \tau_w \,\mathrm{d}A}{\frac{1}{2}\rho U^2 bL}$

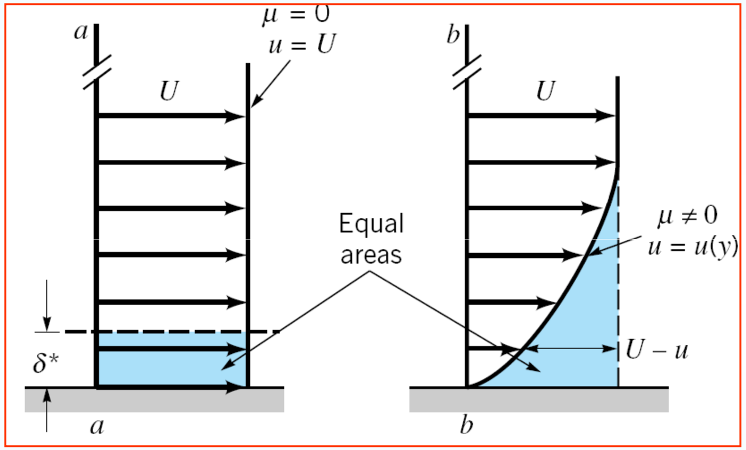
SPESSORI DI SPOSTAMENTO e Q.MOTO: signif. fisico

Spessore di spostamento δ* (displacement thickness)



$$\int_0^\infty v_x \, b \, \mathrm{d}y = \int_{\delta^*}^\infty U \, b \, \mathrm{d}y = \int_0^\infty U \, b \, \mathrm{d}y - \int_0^{\delta^*} U \, b \, \mathrm{d}y \rightarrow U\delta^* = \int_0^\infty (U - v_x) \, \mathrm{d}y$$

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) \mathrm{d}y$$



Spessore di q.moto θ (momentum thickness)

$$\theta U^2 b \quad = \quad b \int_0^\delta v_x \left(U - v_x\right) \mathrm{d}y$$

mancanza di q. moto dovuta a θ

deficit di q. moto nello strato limite

= Forza di taglio risultante sulla superficie (vedi slide successiva)

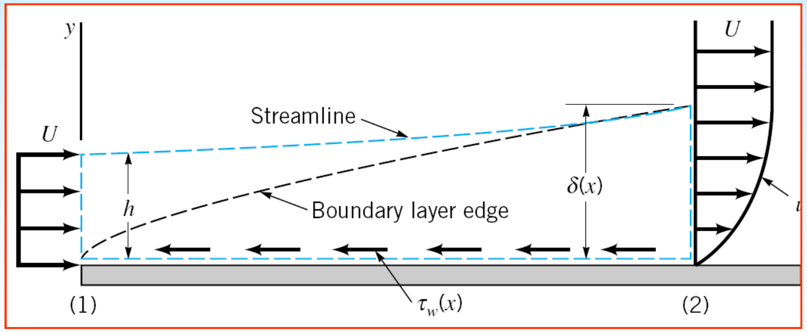
$$\rightarrow \quad \theta = \int_0^\delta \frac{v_x}{U}\left(1 - \frac{v_x}{U}\right) \mathrm{d}y$$

BILANCIO INTEGRALE NELLO STRATO LIMITE (1)

Se dp/dx=0, dal bilancio integrale di q. moto su x applicato allo strato limite

$$-F_D = -\int_{A_w} \tau_w \, \mathrm{d}A = \int_{A_1} \rho\, v_x (\underline{v}\cdot\underline{n})\,\mathrm{d}A + \int_{A_2} \rho\, v_x (\underline{v}\cdot\underline{n})\,\mathrm{d}A$$

$$-F_D == -\int_{A_1} \rho\; U\,U\,\mathrm{d}A + \int_{A_2} \rho\, v_x^2\,\mathrm{d}A \qquad \mathrm{d}A = b\,\mathrm{d}y$$



Risolvendo

$$F_D = \rho\, b \int_0^h U^2\,\mathrm{d}y - \rho\, b \int_0^\delta v_x^{\,2}\,\mathrm{d}y$$

$$\rho U\, b\, h = \rho\, b \int_0^\delta v_x\,\mathrm{d}y \;\rightarrow\; \rho U^2\, b\, h = \rho\, b \int_0^\delta U\, v_x\,\mathrm{d}y$$ (cons. massa)

$$F_D = \rho U^2\, b\, h - \rho\, b \int_0^\delta v_x^{\,2}\,\mathrm{d}y = \rho\, b \int_0^\delta v_x\,(U - v_x)\,\mathrm{d}y = \rho\, b\,\theta U^2$$

$$\boxed{\tau_w = \frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}F_D}{\mathrm{d}x} = \rho\, U^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}} \qquad \theta = \int_0^\delta \frac{v_x}{U}\left(1 - \frac{v_x}{U}\right)\mathrm{d}y$$ spessore di momento

Più in generale, se dp/d$x \neq 0$, Polhausen ha dimostrato che (Panton p.507)

$$\tau_w = \frac{\mathrm{d}F_D}{\mathrm{d}x} = \rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\theta U^2\right) + \rho\,\delta^* U \frac{\partial U}{\partial x} = \rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\theta U^2\right) - \delta^* \frac{\partial p}{\partial x}$$

che restituisce la precedente nel caso p =cost (→U =cost da Bernoulli).

BILANCIO INTEGRALE NELLO STRATO LIMITE (2)

Ipotizziamo un profilo di velocità qualunque

$$\frac{v_x}{U} = g\left(\frac{y}{\delta}\right) = g(Y)$$

Allora

$$F_D = \rho\, b \int_0^\delta v_x (U - v_x)\, \mathrm{d}y = \rho U^2 b\, \delta \int_0^1 g(Y)\left[1 - g(Y)\right] \mathrm{d}Y$$

Ovvero $\quad F_D = \rho U^2 b\, \delta\, C_1$

per confronto con pag. precedente $\quad C_1 = \int_0^1 g(Y)\left[1 - g(Y)\right] \mathrm{d}Y = \dfrac{\theta}{\delta}$

Essendo nota *g (Y)*, C_1 è noto, quindi è noto θ/δ:

Ma ci vuole un'altra condizione per trovare δ !!!

Poi si possono determinare F_D e τ_w

BILANCIO INTEGRALE NELLO STRATO LIMITE : esempio

Ad esempio, per un profilo di velocità lineare, trovare τ_w e δ

$$g(Y) = Y \qquad C_1 = \int_0^1 Y\left[1 - Y\right] \mathrm{d}Y = \left[-\frac{Y^3}{3} + \frac{Y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\delta}{6}$$

Da fluido newtoniano profilo lineare

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0} = \mu \frac{U}{\delta}$$

Dal bilancio di quantità di moto

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \frac{\rho U^2}{6} \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x}$$

ATT. la seconda vale solo per profilo lineare

Uguagliando

$$\frac{\mu U}{\delta} = \frac{\rho U^2}{6} \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} \quad \rightarrow \quad \delta\, \mathrm{d}\delta = \frac{6\mu}{\rho U} \mathrm{d}x$$

Integrando

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{6\mu}{\rho U} x \quad \rightarrow \quad \delta = \sqrt{\frac{12 \upsilon x}{U}} \quad \rightarrow \quad \frac{\delta}{x} = \sqrt{12} \sqrt{\frac{\upsilon x}{U}} = \frac{3.46}{\sqrt{Re_x}}$$

Infine

$$\tau_w = \mu \frac{U}{\delta} = \mu \frac{U \sqrt{Re_x}}{3.46\, x} = 0.289 \frac{\rho U^2}{\sqrt{Re_x}}$$

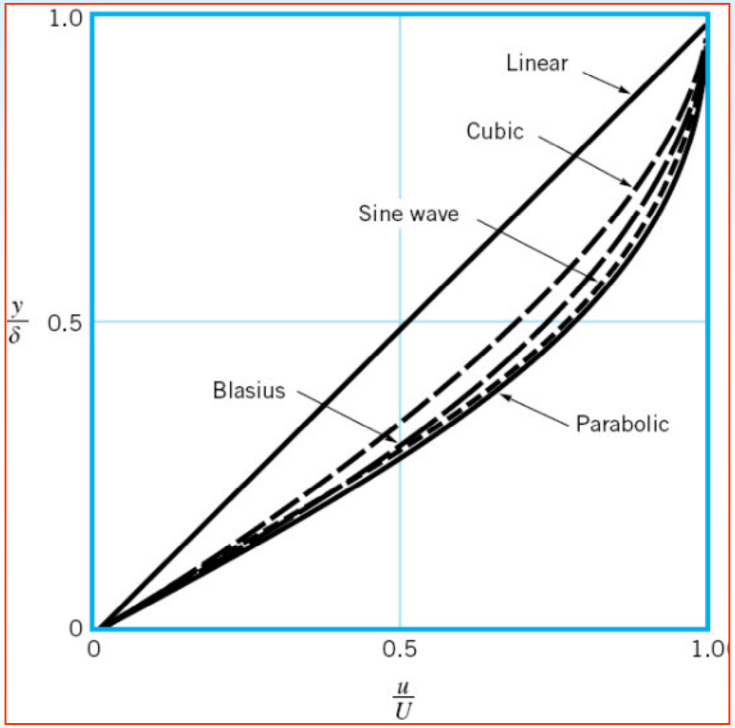
(Blasius: 4.91, 0.332)

ATTENZIONE: ci vogliono due diverse espressioni di τ_w in funzione di δ

BILANCIO INTEGRALE NELLO STRATO LIMITE LAMINARE

Adottando diversi profili di velocità, si ottiene per lo S.L. laminare

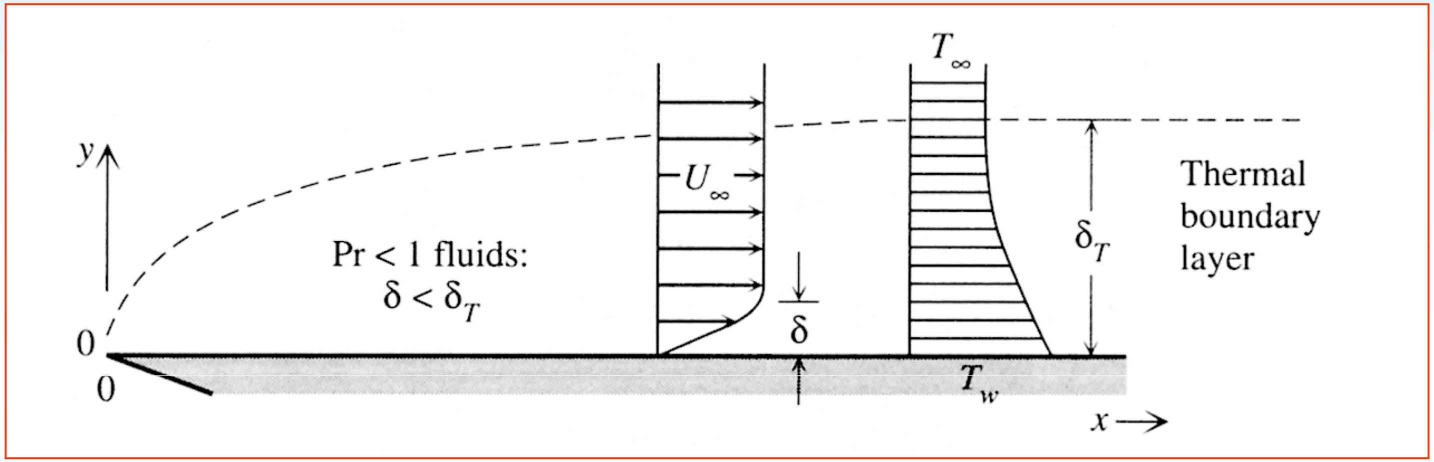
PROFILO di velocità nello s.l.	$\frac{\delta\sqrt{Re_x}}{x}$	$c_f\sqrt{Re_x}$	$C_{Df}\sqrt{Re_L}$	$\frac{\delta^*\sqrt{Re_x}}{x}$
Lineare	3.46	0.578	1.156	1.73
Parabolico	5.48	0.73	1.460	1.83
Cubico	4.64	0.646	1.292	1.74
Sinusoidale	4.79	0.655	1.310	1.74
Blasius	4.91	0.664	1.328	1.73

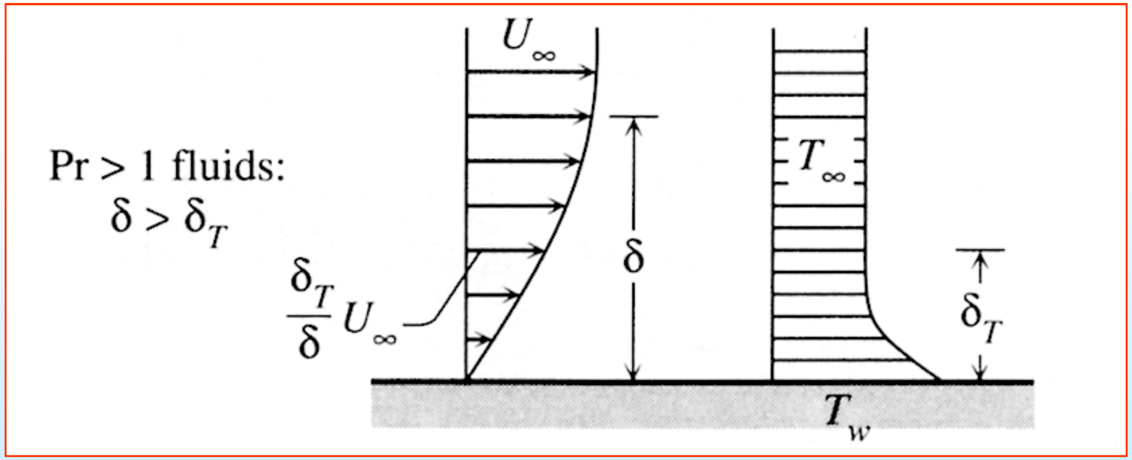


Ricordare $$\tau_w = \frac{1}{2} c_f \rho U^2 \quad , \quad F_D = \frac{1}{2} C_{Df} \rho U^2 b L$$

SCAMBIO TERMICO NELLO STRATO LIMITE LAMINARE

Si distinguono due casi: lo strato limite termico è più spesso di quello dinamico ($\delta_T >> \delta$) o viceversa ($\delta_T << \delta$): vedremo che questa differenza dipende dal valore del numero di Prandtl

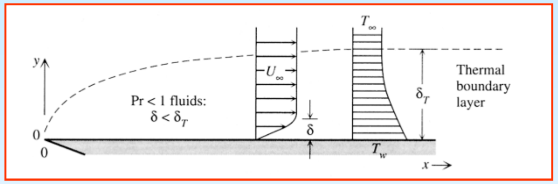




Se il moto è laminare si ha comunque che

$$\boxed{q'' = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} \sim \lambda \frac{\Delta T}{\delta_T}}$$

SCAMBIO TERMICO NELLO STRATO LIMITE LAMINARE



Caso 1: strato limite termico più spesso di quello dinamico ($\delta_T >> \delta$)

Guardando gli ordini di grandezza

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$v_x \frac{\Delta T}{x} + v_y \frac{\Delta T}{\delta_T} \sim a \frac{\Delta T}{\delta_T^2}$$

Dagli ordini di grandezza dell'equazione di continuità

$$\frac{v_x}{x} + \frac{v_y}{\delta} = 0 \quad \rightarrow \quad v_y \sim U \frac{\delta}{x}$$

inoltre $v_x \sim U$ perchè lo strato dinamico è sottile, per cui

$$U \frac{\Delta T}{x} + U \frac{\delta}{x} \frac{\Delta T}{\delta_T} \sim a \frac{\Delta T}{\delta_T^2}$$

Il termine in rosso è trascurabile perchè $\delta/\delta_T << 1$ per cui

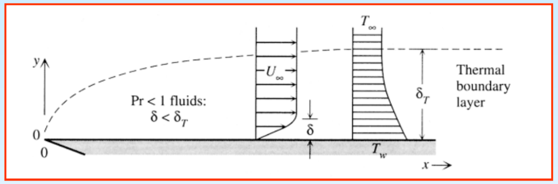
$$U \frac{\Delta T}{x} \sim a \frac{\Delta T}{\delta_T^2} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\delta_T}{x} \right)^2 \sim \frac{a}{Ux}$$

ma $$\frac{U\,x}{a} = \frac{U\,x\,\rho}{\mu} \frac{\mu}{\rho\,a} = Re_x\,Pr = Pe_x$$

(numero di Peclet)

quindi $$\boxed{\delta_T \sim x\,Pe_x^{-0.5}}$$

SCAMBIO TERMICO NELLO STRATO LIMITE LAMINARE



Caso 1: strato limite termico più spesso di quello dinamico ($\delta_T >> \delta$)

D'altra parte si ha $$\frac{\delta_T}{\delta} \sim \frac{x\,Pe_x^{-0.5}}{x\,Re_x^{-0.5}} = \frac{1}{Pr^{0.5}}$$

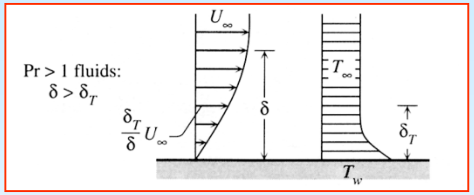
Per cui $$\frac{\delta_T}{\delta} \gg 1 \quad \rightarrow \quad Pr \ll 1 \quad \text{ovvero} \quad \upsilon \ll a$$ come previsto (met. liquidi)

Per il flusso termico si ha $$q'' \sim \lambda \frac{\Delta T}{\delta_T} \sim \lambda \frac{\Delta T}{x} Pe^{0.5}$$

Ovvero introducendo $$Nu_x = \frac{h_c\,x}{\lambda} = \frac{q''\,x}{\lambda\,\Delta T}$$

si ha infine $$\boxed{Nu_x \sim Pe^{0.5} \quad , \quad Pr \ll 1}$$

SCAMBIO TERMICO NELLO STRATO LIMITE LAMINARE



Caso 2: strato limite termico più sottile di quello dinamico ($\delta_T << \delta$)

In questo caso si ha per le velocità
$$v_x \sim U\frac{\delta_T}{\delta} \quad \rightarrow \quad v_y \sim v_x\frac{\delta_T}{x} \sim U\frac{\delta_T^2}{\delta\, x}$$

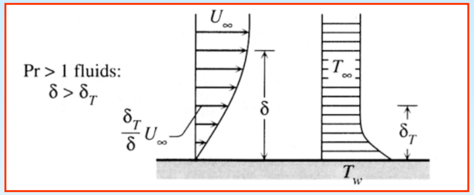
Guardando gli ordini di grandezza
$$v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} = a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$
$$U\frac{\delta_T}{\delta}\frac{\Delta T}{x} + U\frac{\delta_T^2}{x\,\delta}\frac{\Delta T}{\delta_T} \sim a\frac{\Delta T}{\delta_T^2}$$

da cui $\left(\frac{\delta_T}{x}\right)^3 \sim \frac{a\,\delta}{U\,x^2}$ ma $\delta \sim x\,Re_x^{-0.5} = \frac{x^{0.5}\,\upsilon^{0.5}}{U^{0.5}}$

e quindi $\left(\frac{\delta_T}{x}\right)^3 \sim \frac{a\,\delta}{U\,x^2} = \frac{a}{U\,x^2}\frac{x^{0.5}\,\upsilon^{0.5}}{U^{0.5}} = \frac{a}{\upsilon}\frac{\upsilon^{1.5}}{x^{1.5}\,U^{1.5}} = \frac{1}{Pr}\frac{1}{Re_x^{1.5}}$

infine $\boxed{\delta_T \sim x\,Pr^{-0.33}\,Re_x^{-0.5}}$

SCAMBIO TERMICO NELLO STRATO LIMITE LAMINARE



Caso 2: strato limite termico più sottile di quello dinamico ($\delta_T << \delta$)

Allora si ha $$\frac{\delta_T}{\delta} \sim \frac{x\,Pr^{-0.33} Re_x^{-0.5}}{x\,Re_x^{-0.5}} = \frac{1}{Pr^{0.33}}$$

Per cui $$\frac{\delta_T}{\delta} \ll 1 \quad \rightarrow \quad Pr \gg 1 \quad \text{ovvero} \quad \upsilon \gg a$$ come previsto (olii)

Per il flusso termico si ha $$q'' \sim \lambda \frac{\Delta T}{\delta_T} \sim \lambda \frac{\Delta T}{x} Re_x^{0.5}\ Pr^{0.33}$$

Ovvero introducendo $$Nu_x = \frac{q''x}{\lambda \Delta T}$$

si ha infine $$\boxed{Nu_x \sim Re_x^{0.5}\, Pr^{0.33} \quad , \quad Pr \gg 1}$$

SCAMBIO TERMICO NELLO STRATO LIMITE LAMINARE

Polhausen, con un metodo simile a quello di Blasius ha trovato i coefficienti per piastra piana (altre relazioni su Bejan, cap.5)

$$Nu_x = 0.564 \left(Re_x\, Pr\right)^{0.5} \qquad Pr < 0.5$$

$$Nu_x = 0.332\ Re_x^{0.5}\, Pr^{0.33} \qquad Pr > 0.5$$

Parete isoterma (*T* = cost)

$$Nu_x = 0.453\, Re_x^{0.5}\, Pr^{0.33} \qquad Pr > 0.5$$

Flusso termico *q″* = cost

Le proprietà fisiche vanno calcolate alla *temperatura del film*

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2}$$

Una volta trovato Nu_x si ottengono i <u>valori locali</u> *q″* e h_c da

$$\begin{cases} q''(x) = \dfrac{Nu_x\, \lambda\, \Delta T}{x} \\[2ex] h_c(x) = \dfrac{Nu_x\, \lambda}{x} \end{cases}$$

SCAMBIO TERMICO NELLO STRATO LIMITE LAMINARE

Ha interesse anche determinare i valori medi di q'' e α sull'intera piastra

$$\begin{cases} \bar{q}'' = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L q''(x)\ \mathrm{d}\,x \\ \overline{h_c} = \dfrac{\bar{q}''}{\Delta T} \end{cases}$$

In generale se $\quad f(x) = C\,x^n \quad \rightarrow \quad \bar{f}(L) = \dfrac{C\,f(L)}{1+n}$

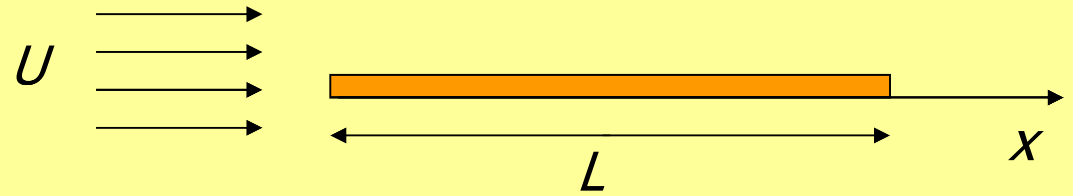
Nel nostro caso $\quad q''(x) = C\,x^{-0.5}$

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{Nu_L} &= 1.128\left(Re_L\,Pr\right)^{0.5} & Pr < 0.5 \\ \overline{Nu_L} &= 0.664\,Re_L^{0.5}\,Pr^{0.33} & Pr > 0.5 \end{aligned}}$$

Parete isoterma (T = cost)

ESEMPIO: RAFFREDDAMENTO DI UN CORPO A T = cost

Una piastra sottile, L = 100 mm b = 200 mm, si trova a T_w = 100 °C, è raffreddata da aria a T_a = 20 °C che la investe con U = 2 m/s.
Trovare: potenza asportata W_T, valore medio di h_c, valore locale di $q''(x)$.



Aria 60 °C: Pr = 0.70, μ = 2.0x10^{-5} Pa s, ρ = 1.06 kg/m^3, λ = 0.028 W/ m K

$$Pr = 0.7 \quad , \quad Re_L = \frac{\rho U L}{\mu} = \quad 10600$$

$$\overline{Nu_L} = 0.664 \; Re_L^{0.5} \; Pr^{0.33} = \quad 60.1$$

$$\overline{h_c} = \frac{\overline{Nu_L}\,\lambda}{L} = \quad 17 \text{ W/m}^2\text{ K} \qquad\qquad W_T = \overline{h_c}\, 2 b L \left(T_w - T_a\right) = \; 54 \text{ W}$$

$$q''(x) = \frac{Nu_x \left(T_w - T_a\right)\lambda}{x} = \frac{0.332 \; Re_x^{0.5} \; Pr^{0.33} \left(T_w - T_a\right)\lambda}{x} = \quad 215 \text{ x}^{-0.5} \;\; \text{W/m}^2$$

Notare che q"(x) ha una singolarità per x=0, dove non vale la teoria dello strato limite.